Examen de Análisis de Variable Compleja.
Cuarto curso de Matemáticas (Metodología).
20 de Septiembre de 1996.

1. Integrando la función
$$f(z) = \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3}$$
a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, probar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

2. Determinar el número de ceros del polinomio
$$P(z) = 2z^6 - z^3 + 4z + 1$$
en el semiplano de la derecha.

3. Constrúyase una transformación de Möbius que aplique el dominio
$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ |z + \frac{5}{4}i| > \frac{3}{4}\}$$
sobre el dominio
$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

4. Desigualdades de Cauchy para funciones holomorfas. Consecuencias inmediatas.

5. Concepto de polo de una función. Distintas caracterizaciones de los polos.

6. Sea f una función entera no constante. Supongamos que existen números $\alpha > 0, M > 0$ verificándose que $|f(z)| > \alpha$ siempre que $|z| > M$. Pruébese que f es una función polinómica.